RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 gennaio 1924.

V. Scialoja Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI.

Biologia. — *Sperimenti sulle presunte diverse razze o specie di fillossera della vite* (1). Nota di B. Grassi e M. Topi.

Già in una Nota precedente, comparsa fin dal 1917 (2), abbiamo accennato alla ipotesi del Börner che la fillossera della vite di Lorena rappresentasse una razza biologica speciale, che egli denominava var. *pervastatrix* ed abbiamo riferiti alcuni nostri esperimenti in proposito.

I nostri esperimenti si basavano sul fatto, già da noi reso noto, che il comportamento della fillossera gallecola in certi vivai posti presso il Lago Maggiore non era lo stesso di quello rilevato nei vivai della Toscana e della Sicilia. Le conclusioni alle quali pervenivamo dopo una prima serie di ricerche, fatte anche in comparazione con la forma gallecola raccolta a Ventimiglia, possono così brevemente riassumersi: colle galle fillosseriche raccolte da viti di Clinton nei dintorni di Intra, non è stato possibile, per tre anni consecutivi, infettare nè alle foglie nè alle radici diversi vitigni americani, che in generale sono atti a portar galle e nodosità; segnalavamo una sola eccezione nella Riparia × Rupestris 101.14, su cui si erano prodotte alcune galle, sebbene non fertili, ma che però non si era infettata alle radici; e ponevamo in rilievo il diverso comportamento, per la produzione delle galle, delle viti nostrali, a seconda della varietà e che si trovassero in vaso od in piena vigna.

Alla stregua di questi risultati avremmo potuto concludere che anche presso il Lago Maggiore si trovava una razza di fillossera che somigliava molto a quella della Lorena, da cui si distaccava solamente per lievi differenze; preferivamo invece, anche con l'appoggio di altri fatti ed osservazioni, formulare diverse ipotesi, che soltanto altre esperienze avrebbero potuto, o meno, convalidare.

Non si deve nemmeno dimenticare che, sia a causa del materiale con cui operavamo, sia per la località dove si conducevano le esperienze, non del tutto si poteva escludere

(1) Tutta la parte sperimentale delle presenti ricerche devesi a M. Topi. Le ricerche sono state fatte per incarico del Ministero dell'Economia Nazionale.

(2) Questi Rendiconti, vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 5. Seduta del 4 marzo 1917.

il dubbio che la mancata infezione potesse anche attribuirsi a cause diverse da quella della inattaccabilità per parte della fillossera. Infatti solo a stagione piuttosto avanzata (agosto) si poteva raccogliere presso Intra il materiale infettante; nè le foglie infettanti erano così piene di galle e queste di uova, come avviene in generale nelle infezioni gallecole di altre località; nè infine le piante che venivano infettate, anche per la temperatura già abbassata, erano sempre nelle migliori condizioni di sviluppo. Fatta la dovuta parte a queste riserve, la mancata infezione, specialmente gallecola, per tre anni consecutivi era indubbiamente assai significativa.

***

In questi ultimi anni il Börner ha mutato profondamente la sua opinione ed è giunto alla conclusione che la fillossera della vite dev'essere distinta in due specie: *vitifolii* e *vastatrix*, sinonimo quest'ultimo di *pervastatrix*. Conviene in proposito entrare in qualche particolare.

Terminata la guerra, in seguito alla quale il Börner dovè traslocare il centro dei suoi studî da Villers l'Orme, presso Metz, a Naumburg am Saale nella Germania centrale, egli continuò nelle sue ricerche e nelle sue pubblicazioni. In queste, seguendo il corso delle sue ricerche, è giunto a conclusioni molto diverse e spesso contradittorie. Dapprima, partendo dalla premessa che nella Germania sarebbe esistita soltanto la var. *pervastatrix*, giungeva alla conclusione che con la cultura esclusiva dei portinnesti, inattaccabili dalla stessa fillossera, si sarebbe potuti giungere al risanamento fillosserico dei terreni infetti: conclusione facilmente oppugnabile, come venne di fatto oppugnata, nel campo viticolo e pratico. Successivamente, ed attraverso ricerche sulle fillossere delle varie regioni tedesche, che ebbero per risultato la constatazione di un comportamento, sia pur lievemente diverso delle fillossere dell'una o dell'altra regione, credè di giungere alla conclusione che vi erano due specie di fillossere di origine americana: l'una che sarebbe, come radicicola, la radicicola delle radici giovanî, non lignificate; l'altra la radicicola di quelle di uno o più anni, lignificate. La prima, da lui detta *Peritymbia* (o *Phylloxera*) *vitifolii*, avrebbe come pianta ospite la V. Riparia, la seconda, detta *Perytimbia* (o *Phylloxera*) *vastatrix* (che equivarrebbe alla *pervastatrix* del Börner), avrebbe come pianta ospite la V. Labrusca e le viti europee: questa sarebbe la sola specie diffusa in Germania ed in qualche altra regione (Svizzera, parte dell'Austria ecc.), mentre nelle regioni del sud (Francia, Italia ecc.) esisterebbero ambedue le specie. La specie veramente nefasta sarebbe dunque la *P. vastatrix*, diffusa ovunque; mentre la *P. vitifolii* non sarebbe causa che di galle e di nodosità sulla Riparia ed ibridi.

Il Börner sarebbe anche giunto a determinare delle differenze formali fra le due specie, e cioè la P. vastatrix avrebbe i tubercoli marginali dei tre anelli toracici divisi e distinti l'uno dall'altro, mentre nella P. vitifolii questi tubercoli rimarrebbero uniti e indistinti, specialmente nel terzo anello ed il diametro dei tubercoli sarebbe sensibilmente più grosso che nella P. vastatrix. La P. vitifolii, come si è detto, formerebbe solo nodosità sulle radici annuali ed ibernerebbe soltanto eccezionalmente sulle giovani radici; la P. vastatrix formerebbe nodosità e tuberosità sulle radici lignificate, su cui ibernerebbe.

Come si rileverà in appresso i risultati delle nostre osservazioni e delle nostre esperienze contraddicono in modo assoluto all'esistenza di due specie di fillossera.

***

Riferendo le nostre prime esperienze nella precedente Nota, dicevamo che al momento della pubblicazione erano riunite nello stesso vaso una barbatella di vite nostrale, infettatasi con la fillossera di Intra, ed una americana immune. I vasi erano tre, l'uno contenente una vite nostrale ed una di 101.14; l'altro una vite nostrale ed una di

Riparia Gloire; il terzo una vite nostrale ed una di 3309. L'esame dell'apparato radicale, fatto nell'anno stesso (1917) in autunno, mostrò che mentre l'infezione si conservava sulle radici di due delle viti nostrali, con formazione sia pur limitata di nodosità e tuberosità, nessuna nodosità comparve, e cioè completamente immuni si conservarono le tre viti americane. Anche l'esame radicale fatto l'anno successivo (estate 1918) dette gli stessi risultati. Notisi anche che, pure essendo morta in un vaso, in seguito a danneggiamento subìto nell'estrazione dal vaso per esame delle radici, la vite nostrale, neanche in questo caso l'infezione passò alla contigua vite americana. L'apparato radicale, specialmente delle viti americane, si conservò sempre molto bene sviluppato; l'infezione però sulle viti nostrali si mantenne sempre assai scarsa.

Alla fine di settembre dello stesso anno (1918) venne ripetuto l'esperimento, sempre con galle raccolte presso Intra. Non era da attendersi, data la stagione tardiva e la vegetazione languente, un'infezione gallecola, che infatti non comparve affatto. L'anno successivo (1919), mentre lo sviluppo aereo e radicale delle viti americane era bellissimo, la vegetazione delle viti nostrali fu assai meschina: una di esse morì. Ma l'esame radicale continuò a dare gli stessi resultati: cioè le viti americane si conservavano assolutamente immuni.

Allora in fine di settembre dello stesso anno (1919) volemmo rinnovare l'infezione, ma adoperando, come materiale infettante, anche le radici. Raccogliemmo le une e le altre nel vivaio di Arizzano, dove l'infezione gallecola era comparsa in quell'anno sopra una sola vite di Rupestris Velletri n. 5, da cui si era diffusa, anche artificialmente, a poche (3 o 4) viti contigue della stessa varietà. Prendemmo radici capillari molto infette dalla stessa Rupestris 5 e da viti di Taylor; nel raccogliere quest'ultime avemmo occasione di osservare come ciuffi di radici di Riparia Gloire, che provenivano dal filare contiguo e si univano fino ad intricarsi colle radici di Taylor, erano del tutto immuni, mentre le radici di Taylor sembravano grappoli per il numero di nodosità fillosseriche che presentavano.

L'esame radicale delle viti, fatto l'autunno successivo (1920), mostrò che, nonostante l'uso di radici e principalmente di radici capillari, l'infezione anche questa volta rimase limitata alle viti nostrali e queste pure erano leggermente infette.

* * *

Ancora all'oscuro delle nuove ricerche del Börner e per altre difficoltà sopraggiunte, le nostre esperienze si interruppero durante il 1921, per riprendersi più ampie nella primavera del 1922, proseguendo poi per tutto il 1923.

Una prima serie di esperienze, iniziate alla primavera 1922, era costituita da barbatelle in vaso di vitigni nostrali e di Riparia × Rupestris 3309, Aramon × Rupestris e Berlandieri × Rupestris 301 A. Queste viti furono infettate il 14 maggio 1922 con radici infette raccolte ad Arizzano; in quest'epoca ad Arizzano eravamo appena all'inizio del risveglio dall'ibernamento, ma nessuna fillossera aveva ancora cominciato a deporre le uova. Al 24 luglio successivo, ad un esame superficiale, nessuna vite apparve infetta; l'infezione si conservava però sul materiale infettante; le viti erano assai limitate di sviluppo aereo e radicale. Al 28 agosto tre viti nostrali erano infette assai leggermente; le viti americane si conservavano immuni; sulle radici infettanti si vedevano ancora fillossere. Verso la metà di ottobre avemmo occasione di fare osservazioni complete sull'infezione gallecola nel vivaio di Arizzano: in quest'anno l'infezione gallecola si presentava ancora su Rupestris Velletri n. 5, dove all'epoca della visita, nonostante la stagione tardiva, vi erano galle numerose e fresche. Sul Vialla numerose erano le foglie piene di galle, ma l'infezione era assai scarsa nel complesso: inoltre era, a quell'epoca, ormai arrestata e le galle erano aperte e vuote di uova e di insetti. Qualche rara galla

si notava su Rupestris metallica, ma soltanto in piante prossime al Vialla, da cui evidentemente era passata l'infezione; tanto che altri appezzamenti di Rupestris metallica più distanti erano completamente privi di galle.

Le galle mancavano affatto su tutti gli altri vitigni, e cioè: Riparia Gloire, Riparia Tomentosa, Riparia G. Glabre, Rupestris du Lot, Rupestris Martin, Rupestris Velletri n. 1, 11, 13 e 16, Rupestris metallica (appezzamenti distanti dal Vialla), Riparia x Rupestris 3306 e 101.14, Rupestris × Cordifolia 107.1, Berlandieri × Riparia 420 A, 34 E. e 57 11, Berlandieri × Rupestris 219 A e 301 A, Aramon × Rupestris n. 1 e Mourvèdre × Rupestris 1202, Elvira. Da notare che nel vigneto la maggior parte delle viti potrebbe offrire col tronco e con cordoni di due o più anni un ottimo ed adatto rifugio per la deposizione delle uova di inverno; e che l'annata, a cui si riferiscono queste osservazioni, è rimasta memorabile per la siccità e per il considerevole sviluppo preso dall'infezione gallecola in altre regioni dell'Italia settentrionale (p. es. Veneto). Del pari i barbatellai, dove si trovavano piante anche di due o tre anni, erano completamente immuni da galle fillosseriche.

Con le galle e le radici infette raccolte in questa occasione vennero nuovamente infettate le viti in vaso, che erano poste in una specie di serra a vetri, non riscaldata. Anche dopo quindici giorni si potevano vedere fillosserine vaganti lungo i tralci delle barbatelle, che erano in buone condizioni di sviluppo, con foglioline in accrescimento. Ciò nonostante nessun accenno neanche lontano di galla si produsse. Molte fillosserine uscite dalle galle si fermavano sulle foglie infettanti avvolte al fusticino; queste neonate furono riconosciute per neogallecole-gallecole e per neogallecole-radicicole; forse in leggera prevalenza le prime.

Nello stesso anno 1922 venne preparato, in altra località più calda, sempre in vasi, un altro gruppo di barbatelle delle stesse varietà usate nei precedenti esperimenti. Queste viti furono infettate con radici di viti nostrali e prevalentemente con pezzi di corteccie del ceppo di viti infette, raccolte nella provincia di Pisa.

Anche in questa esperienza si infettarono soltanto le viti nostrali. Da notare che fra le viti infettate vi erano, come si è detto, barbatelle di Aramon × Rupestris, vitigno notoriamente assai attaccato dalla fillossera, e che le viti americane si trovavano anche sole, cioè non accompagnate da viti nostrali, in alcuni vasi.

Nel 1923, oltre conservare i vasi delle precedenti esperienze, che continuavano, se ne intrapresero delle altre, in seguito alle ricerche ormai note del Börner; fra l'altro si piantarono in piena terra, in due località distanti, l'una più fredda, l'altra più calda, delle viti nostrali, di Riparia Gloire e 3309, che dovevano essere in seguito infettate ancora con la fillossera di Arizzano.

Intanto il 12 di giugno si potevano ricevere dal Börner quattro foglie di viti portanti galle, che avrebbero dovuto essere della specie, diciamo così « del nord », o *Ph. vastatrix* del Börner, incapace cioè di attaccare certe viti americane, e principalmente la Riparia Gloire e la 3309, e capace invece di attaccare, alle foglie e alle radici, le viti europee e la vite Labrusca.

Data la scarsità del materiale, con tre foglioline infettammo (ponendole, al solito, attorno al fusticino o lievemente interrandole al piede) una vite nostrale appositamente preparata in vaso; e con una foglia, una vite di 3309, pure in vaso. Esaminando le neonate che uscivano da queste galle potemmo osservare che le neogallecole-radicicole erano in grande prevalenza; notiamo che, alla stessa epoca, da galle su foglie di Riparia Gloire raccolte nei vivai infetti, escono in grandissima prevalenza neogallecole-gallecole.

Dopo pochi giorni dall'infezione, comparvero *sulle foglie della vite nostrale* le galle; nessuna nè allora nè in seguito comparve sul 3309. Queste galle apparentemente si svilupparono bene nei primi giorni; ai primi di luglio cominciammo a notare una maggiore irregolarità ed imperfezione, che si fece più manifesta nei giorni successivi.

Verso la metà del mese avrebbero dovuto svilupparsi le galle della nuova generazione e vi erano foglioline in sviluppo, adatte per accoglierle; ma tardando queste, cogliemmo una foglia, contenente circa diciannove galle, più o meno regolarmente sviluppate, per esaminarne il contenuto. Molte galle erano del tutto vuote; alcune madri erano morte o morenti al di fuori delle galle; in altre galle si trovavano madri morte e mucchi di uova alterate; rari o rarissimi i gusci di uova schiuse. Evidentemente l'infezione gallecola non aveva trovato condizioni opportune per svilupparsi e stava arrestandosi: come si è detto, le viti erano magnifiche di sviluppo ed in condizioni opportunissime per lo sviluppo dell'infezione. Successivamente comparvero alcune nuove galle, forse in tutto una diecina, anche su foglioline non contigue; alcune di queste galle si videro poi vuote ed abbandonate; altre, specialmente marginali, si svilupparono meglio; ma l'infezione andò completamente estinguendosi.

Il 25 agosto potemmo rinnovare l'infezione con materiale più abbondante, ricevuto dal Börner; le foglie infette erano di Taylor Blackhare. Con questo materiale si infettarono barbatelle in vaso di 3309 (due vasi) e di viti nostrali (un vaso). L'esame delle neonate uscenti dalle galle, sparse nel recipiente ed ancora vive, mostrò che circa il 95 % era costituito da neogallecole-radicicole ed appena il 5 % da neogallegole-gallecole. Questa volta non comparve nessuna infezione gallecola nè sulla vite nostrale nè sul 3309.

Il 21 settembre abbiamo fatto un accurato esame dell'apparato radicale delle viti in vaso, infettate due volte con la fillossera *tedesca*, ed i risultati sono stati i seguenti: le viti nostrali sono molto infette; abbondantissime le nodosità, abbondanti e sviluppate le tuberosità; il marciume comincia ad invadere le radici delle viti, che finora si conservano belle di sviluppo aereo e radicale.

In un vaso contenente viti di 3309 vi sono pure nodosità; non sono molto abbondanti, ma se ne possono raccogliere facilmente una diecina: nelle nodosità vi sono fillossere in via di sviluppo. Nell'altro vaso non vi era infezione.

* * *

Ai primi di luglio avemmo occasione di fare estese ricerche ed osservazioni sulla infezione radicale nel vivaio di Arizzano. Dobbiamo premettere che a quell'epoca nel vivaio non v'era quest'anno *alcuna infezione gallecola*; ed abbiamo ragione di ritenere che non sia comparsa nemmeno più tardi. Per quanto valga, ricordiamo che quest'anno la stagione è stata rigida e fredda nel mese di giugno, quando, con tutta probabilità, avviene nella località la schiusa dell'uovo d'inverno.

L'infezione fillosserica è, in tutto il vivaio, ridottissima; di tutti i vitigni ivi coltivati, dei quali abbiamo dato sopra un quasi completo elenco e fra i quali non mancano diversi ibridi di Labrusca (Isabella, Elvira, Cunningham ecc.) e vitigni europeo-americani, i soli che si presentano più infetti e potremmo dire, in senso relativo, i soli infetti sono i vitigni Clinton e Vialla. Ma anche su questi, se le nodosità vecchie sono piuttosto numerose, quelle fresche sono tutt'altro che abbondanti; si ha quindi l'impressione che sia avvenuta una forte disinfezione per mezzo della sciamatura delle alate. A quell'epoca il risveglio era iniziato ovunque e molto rare erano le ibernanti; più numerose le madri con uova, meno le forme più giovanili.

Mentre taluni appezzamenti di Riparia non presentavano alcuna nodosità nemmeno dell'anno precedente, queste furono riscontrate in altro appezzamento di Riparia Gloire.

Con le radici infette di Clinton e Vialla raccolte, vennero infettate nuovamente le barbatelle in vaso degli anni precedenti e quelle in campo, cui abbiamo sopra accennato. L'esame radicale, fatto agli ultimi di agosto, dette risultati analoghi ai precedenti: risultarono cioè infette, sebbene scarsamente, le viti nostrali, anche se la vegetazione di alcune era languente; risultarono invece immuni le 3309, in vaso ed in piena terra, e le altre viti americane in vaso, sebbene di rigoglioso sviluppo; all'epoca dell'esame la fillossera era sempre presente sul materiale infettante.

***

Durante le esperienze avemmo occasione di fare anche le seguenti osservazioni: nel vivaio consorziale di Empoli, dove la fillossera gallecola comparve tre anni fa sul 1202, nonostante la cura Balbiani, fatta lo scorso anno e quest'anno, vi sono galle sul 3309 e sul 101.14; mancano su tutti gli altri vitigni coltivati, compreso il 1202.

In agosto l'infezione si notava sul 3309 e sul 101.14 e meno abbondante sul 106.8; completamente immuni erano i vitigni Aramon × Rupestris n. 1, 1202, Rupestris du Lot e 420 A. Ma l'infezione era pienamente estinta. Data la natura del terreno eccessivamente argilloso e tenacissimo e l'aridità della stagione, la vegetazione doveva aver subito un considerevole arresto, tanto che tutte le gallecole erano morte. Le galle vecchie erano piene di gusci d'uova e di madri morte; le foglioline apicali, anche delle piante che erano state molto infette, non presentavano nè galle nè gallecole; dove avevano tentato fissarsi delle neonate, le galle non si erano prodotte e le fillosserine erano morte sul posto. In tutto il vivaio non fu possibile raccogliere alcuna galla fresca, con madri ovificanti ed uova.

Nel vivaio consorziale di S. Miniato le galle sono comparse da diversi anni: quest'anno sono, in ordine decrescente, su 3309, 101.14, 106.8, 3306, Riparia Gloire, 157.11. In questo vivaio non si è verificato il fenomeno costatato ad Empoli: ma l'infezione è continuata nell'estate e nell'autunno, sebbene con intensità un po' limitata. Quel che è da segnalare è la localizzazione delle galle, notevole anche ad Empoli, ma qui più evidente. Cioè vi sono gruppi di piante, a macchia, per esempio, nell'appezzamento del 3309, molto infette di galle, mentre tutte le altre piante all'intorno si presentano scarsamente infette o del tutto immuni. Insomma l'infezione, invece di essere diffusa per tutto l'appezzamento del 3309, si manifesta a chiazze, a macchie, qua e là, come avviene dei deperimenti fillosserici nelle vigne nostrali: si ha quindi l'impressione che la recettività per l'infezione dipenda più dalla ubicazione e dallo stato di vegetazione del vitigno, che dalla qualità del vitigno stesso.

Matematica. — *Sulle funzioni trascendenti semplici.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

1. Nel piano della variabile complessa x, si indichi con t il tratto dell'asse reale compreso fra 1 e $+\infty$, e si indichi con t la variabile reale, positiva, maggiore d'uno. Sia data su t una funzione $\sigma(t)$ reale o complessa, limitata ed integrabile su ogni intervallo finito di t, e sia inoltre convergente l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t}. \tag{1}$$

Vale allora il teorema:

« Per ogni valore di x non appartenente a t, l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t-x} \tag{2}$$

« è convergente ».

Infatti, l'integrale

$$\tau(u) = \int_1^u \frac{\sigma(t)\,dt}{t}$$

dà una funzione di u continua su tutto t, la quale, per l'ipotesi della convergenza di (1), sarà limitata su t e vi avrà un massimo valore assoluto a. Si consideri ora, con $1 < m < m'$, l'integrale

$$j(m, m') = \int_m^{m'} \frac{\sigma(t)\,dt}{t - x},$$

x non appartenente a t. Integrando per parti, si avrà

$$j(m, m') = \frac{\tau(m')}{m' - x} - \frac{\tau(m)}{m - x} + \int_m^{m'} \frac{\tau(t)\,dt}{(t - x)^2}. \tag{3}$$

Poichè x non appartiene a t, $1 - \frac{x}{t}$ ha, su tutto t, un minimo valore assoluto non nullo: sia esso δ; perciò i due primi termini del secondo membro di (3) dànno un valore assoluto inferiore a $\frac{2a}{m\delta}$; l'ultimo termine del detto secondo membro, essendo minore in valore assoluto di

$$a \int_m^{m'} \frac{dt}{|t - x|^2},$$

è pure inferiore in modulo a $\frac{2a}{m\delta}$. Basta dunque, scelto un ε positivo arbitrario, prendere $m > \frac{4a}{\varepsilon\delta}$ per rendere $|j(m, m')| < \varepsilon$; con ciò la convergenza di (2) è dimostrata.

2. La medesima dimostrazione vale a provare che

« Preso nel piano x un campo C, di cui i punti interni e al con-
« torno abbiano da t distanze superiori ad un numero positivo assegnabile,
« per tutti i punti di questo campo l'integrale

$$f(x, u) = \int_1^u \frac{\sigma(t)\,dt}{t - x} \tag{4}$$

« tende, per $u \to +\infty$, uniformemente ad

$$f(x) = \int_1^{\infty} \frac{\sigma(t)\,dt}{t - x} \text{ ». } \tag{2'}$$

Ma le funzioni (4) sono notoriamente analitiche regolari in tutto il piano x, ad eccezione di un taglio fatto lungo l'asse reale fra 1 ed u; perciò, applicando un noto teorema di La Vallée Poussin (1), ed in seguito alla dimostrata convergenza uniforme, si ha che

« La $f(x)$ è funzione (o ramo di funzione) analitica, regolare in tutto
« il piano x ad eccezione del taglio t ».

(1) Generalizzazione di un teorema fondamentale di Weierstrass, data nella Nota *Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Ann. de la Société scientifique de Bruxelles, T. 17_2, 1893.

Di più, e per lo stesso teorema di La Vallée Poussin, per le derivate di $f(x)$ valgono le espressioni, valide nello stesso campo:

$$f^{(n)}(x) = n! \int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{(t-x)^{n+1}}. \tag{5}$$

3. Le funzioni $f(x)$ definite da (2'), sono trascendenti analitiche aventi uno speciale carattere di semplicità. Tolto il raggio t, esse sono dovunque regolari, e per la generalità delle $\sigma(t)$, funzione arbitraria di variabile reale, esse non saranno in generale continuabili attraverso t, che verrà a costituire per esse una linea singolare o, se si vuole, un taglio *essenziale*. Ma se la $\sigma(t)$ è funzione analitica, regolare in tutto od in parte nei punti di t (caso che è stato ripetutamente considerato) allora il taglio non è più essenziale: esso diviene un taglio hermitiano (*künstlich*) che può essere variato come linea d'integrazione lasciandone invariati gli estremi, e la (2'), anzichè definire una funzione analitica uniforme a linea singolare essenziale, dà un ramo ad un valore di una funzione analitica, prolungabile attraverso t e generalmente multiforme

Alle funzioni uniformi, o ai rami di funzioni multiformi, rappresentati da (2), daremo il nome di *trascendenti semplici*.

4. La $f(x)$ ammette entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio 1 uno sviluppo in serie di potenze

$$f(x) = \sum c_n x^n, \tag{6}$$

i cui coefficienti sono dati, in forza delle (5), da

$$c_n = \int_1^\infty t^{-n-1}\,\sigma(t)\,dt.$$

Ora, questi coefficienti non sono che i valori, per $z = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, della funzione

$$F(z) = \int_1^\infty t^{-z-1}\,\sigma(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-zt}\,\sigma(e^t)\,dt, \tag{7}$$

la quale è una funzione determinante di cui $\sigma(e^t)$ è la generatrice: essa è analitica in z e, dalla convergenza della (1), risulta notoriamente che essa converge per ogni z la cui parte reale è positiva. Pertanto:

« Lo sviluppo in serie di potenze di x di una trascendente semplice « ha per coefficienti i valori, per $z = 0, 1, 2, \ldots$, di una funzione deter- « minante, regolare per $\Re(z) > 0$, di cui $\sigma(e^t)$ è la generatrice ».

Reciprocamente, abbiasi una serie di potenze $\sum c_n x^n$ il cui coefficiente generico c_n sia il valore, per $z = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, di una funzione determinante regolare per $\Re(z) \geq 0$:

$$F(z) = \int_1^\infty t^{-z-1}\,\varphi(t)\,dt:$$

l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{t}$$

viene dunque ad essere convergente e perciò, per i precedenti n.i 1 e 4, « la serie (6) è lo sviluppo, per $|x|<1$, di una funzione semplice » (1).

Si noti che, per la proprietà ricordata delle funzioni determinanti, dalla convergenza di (1) consegue quella di

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t^\alpha}$$

per ogni α la cui parte reale sia maggiore d'uno.

5. Alle ipotesi fatte al n. 1 sulla funzione $\sigma(t)$ si aggiunga ora quella della continuità su tutto t. Si può allora dimostrare che

« Se la variabile x attraversa normalmente il taglio t nel punto « $t=u$, la $f(x)$ subisce una discontinuità data da $2\pi i\,\sigma(u)$ » ; o, in altri termini, si ha:

$$\lim_{v\to 0}\Big(f(u+iv)-f(u-iv)\Big)=2\pi i\,\sigma(u)\,. \tag{8}$$

A dimostrare ciò, si può scrivere anzitutto

$$f(u+iv)-f(u-iv)=2iv\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{(t-u)^2+v^2}\,; \tag{9}$$

ora, $\sigma(t)$ essendo continua, si può, preso un numero positivo arbitrario ε, determinare un numero positivo δ tale che per

$$u-\delta<t<u+\delta$$

risulti

$$\sigma(t)=\sigma(u)+\varepsilon(t)\,,\quad |\varepsilon(t)|<\varepsilon\,. \tag{10}$$

L'integrale del secondo membro della (9) si spezzi in

$$\int_1^{u-\delta}+\int_{u-\delta}^{u+\delta}+\int_{u+\delta}^\infty\,;$$

di questi, il primo, integrato per parti, dà

$$\left(\frac{\tau(t)}{(t-u)^2+v^2}\right)_1^{u-\delta}+2\int_1^{u-\delta}\frac{\tau(t)\,(t-u)\,dt}{((t-u)^2+v^2)^2}\,,$$

(1) Un caso particolare di questo teorema è stato dato da tempo, ora per la parte diretta, ora per la reciproca, da Hadamard, Leau, Le Roy, Faber: si tratta del caso in cui i coefficienti c_n della serie sono i valori, per $n=m, m+1, \ldots$ di una funzione $F(z)$ analitica regolare per $z=\infty$. È noto infatti che le funzioni regolari per $z=\infty$ rientrano come caso particolare nella classe delle funzioni determinanti. In questo caso però, la $\sigma(t)$ è essenzialmente analitica (anzi intera) e quindi la funzione semplice ha in t un taglio non essenziale.

e questo è in modulo inferiore ad $\frac{a}{\delta^2} + \frac{2a}{\delta^3}$, essendo a (n. 1) il massimo valore assoluto di $\tau(t)$. Analogo risultato per il terzo; si può dunque prendere v positivo abbastanza piccolo perchè il prodotto

$$2iv\left(\int_1^{u+\delta} + \int_{u+\delta}^{\infty}\right)$$

risulti inferiore ad ε in valore assoluto. In quanto al secondo integrale, esso dà, per la (10):

$$2iv\int_{u-\delta}^{u+\delta} = 2iv\,\sigma(u)\int_{u-\delta}^{u+\delta}\frac{dt}{(t-u)^2+v^2} + 2iv\int_{u-\delta}^{u+\delta}\frac{\varepsilon(t)\,dt}{(t-u)^2+v^2},$$

e qui, prendendo $\frac{t-u}{v}$ come variabile d'integrazione, il secondo termine nel secondo membro risulta subito inferiore a $2\varepsilon\pi$ in valore assoluto, mentre il primo si scrive

$$2i\,\sigma(u)\,(\text{arc tg}\,t)_{-\delta/v}^{\delta/v},$$

e qui si può prendere v abbastanza piccolo perchè esso differisca in valore assoluto da $2\pi i\,\sigma(u)$ per meno di ε. La (8) risulta con ciò dimostrata.

6. Nel caso, assai più restrittivo, e che è quasi esclusivamente quello considerato fin qui, in cui la $\sigma(t)$ si suppone funzione analitica regolare nei punti della linea t esclusi gli estremi, il teorema precedente rientra in una antica proposizione di Hermite [1]; in questo caso, il taglio τ non è essenziale, e se si parte da un punto x esterno a t ma appartenente al campo di regolarità di $\sigma(x)$, e si ritorna in x descrivendo una curva chiusa che attraversi t, partendo col valore $f(x)$, si ritorna col valore $f(x) + 2\pi i\,\sigma(x)$. L'integrale (2) dà un ramo di una funzione multiforme, per la quale t è un taglio riemanniano; al ritorno, x va considerato in un foglio della riemanniana consecutivo a quello cui apparteneva il punto di partenza.

Il caso qui considerato, in cui si fa « per la $\sigma(t)$ la sola ipotesi della scontinuità », potrebbe agevolmente estendersi a casi più generali, nei quali si ammetterebbero per $\sigma(t)$ alcune forme di discontinuità. Così, se per $t = u$ la $\sigma(t)$ ammette una discontinuità di prima specie, cioè esistono $\sigma(u-0)$ e $\sigma(u+0)$, si vede facilmente che il salto è dato, all'infuori del fattore $2\pi i$, da $\frac{1}{2}(\sigma(u+0) + \sigma(u-0))$.

7. Se $f_m(x)$ è la funzione semplice ottenuta da $\frac{\sigma(t)}{t^m}$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, fra questa e la $f(x)$ passa la relazione

$$x^m f_m(x) = f(x) - c_0 - c_1 x - \cdots - c_{m-1} x^{m-1}.$$

[1] *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, J. di Crelle, T. 94, 1884, e *Cours d'Analyse* (lith.), Paris, 1891, p. 155.

Se ora la (1) non fosse convergente, ma lo fosse

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t^\alpha},$$

dove la parte reale di α è >1, la (2) non avrebbe più senso, mentre lo ha la $f_m(x)$ per ogni intero m non inferiore alla parte reale di α. Si può, in tal caso, sostituire alla $f(x)$ la espressione

$$x^m f_m(x) + p(x),$$

essendo $p(x)$ un polinomio razionale intero in x, di grado $m-1$ al più, arbitrario; in questa espressione si conservano le proprietà della $f(x)$.

Meccanica. — *Sull'energia cinetica di masse fluide continue: espressioni varie dell'energia cinetica.* Nota del Corrisp. UMBERTO CISOTTI.

4. *Valutazione di* $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ (1). — Dalla prima delle (8), derivando rispetto a t, si ottiene

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \int_S \mu \frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt}\,dS. \tag{14}$$

Considerando il moto del fluido dal punto di vista euleriano, μ e $\mathbf{v}$ sono funzioni di t e di P, per cui

$$\frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r}\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\times\operatorname{grad}(\mathbf{r}\times\mathbf{v});$$

da questa, moltiplicando i due membri per μ e aggiungendo e togliendo nel secondo membro lo scalare $\mathbf{r}\times\mathbf{v}\frac{\partial\mu}{\partial t}$, si ricava

$$\mu\frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{r}\times\mathbf{v}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mu\mathbf{v}\times\operatorname{grad}(\mathbf{r}\times\mathbf{v});$$

ma, per l'equazione di continuità,

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mu\mathbf{v}),$$

per cui

$$\mu\frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\operatorname{div}(\mu\mathbf{v}) + \mu\mathbf{v}\times\operatorname{grad}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}),$$

(1) Vedi questi Rendiconti, vol. XXXII, 2° sem., pag. 464.

e infine, per essere la somma dei due ultimi termini $\operatorname{div}[\mu(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,\mathbf{v}]$.

$$\mu\frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt}=\mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t}+\operatorname{div}[\mu(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,\mathbf{v}].$$

Per questa, la (14) può scriversi

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt}=\int_{\mathrm{S}}\mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t}\,d\mathrm{S}+\int_{\mathrm{S}}\operatorname{div}[\mu(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,\mathbf{v}]\,d\mathrm{S};$$

ora quest'ultimo integrale, potendosi esprimere anche nel modo seguente:

$$-\int_{\sigma}\mu(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,(\mathbf{v}\times\mathbf{n})\,d\sigma,$$

è nullo per essere

$$\mathbf{v}\times\mathbf{n}=0, \tag{15}$$

in ogni punto di σ (1), per cui, in definitiva, si ha

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt}=\int_{\mathrm{S}}\mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t}\,d\mathrm{S}. \tag{16}$$

5. *Prima espressione dell'energia cinetica.* — Dalla (7) si ricava

$$2\mathrm{T}=\frac{d\mathrm{V}}{dt}-\mathrm{W}, \tag{17}$$

e, per la (13) e la (16),

$$2\mathrm{T}=\int_{\mathrm{S}}\left\{\mathbf{r}\times\left[\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t}-\mu\mathbf{F}\right]-\mathrm{I}_1\beta\right\}d\mathrm{S}-\int_{\sigma}\mathbf{r}\times\mathbf{F}_n\,d\sigma, \tag{18}$$

che fornisce una espressione notevole dell'energia cinetica della massa fluida.

6. *Altre espressioni dell'energia cinetica.* — Riferendoci alla terza delle (8), si noti che

$$\mathbf{F}+\mathbf{f}=\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

ed essendo $\mathbf{v}$ funzione di t e di P, per cui

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\operatorname{rot}\mathbf{v})\wedge\mathbf{v}+\tfrac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{v}^2,$$

si ha

$$\mathbf{F}+\mathbf{f}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\operatorname{rot}\mathbf{v})\wedge\mathbf{v}+\tfrac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{v}^2.$$

(1) Si rilevi che S è lo spazio fisso entro cui avviene il moto della massa fluida continua, quindi: o il moto non si estende fino alla superficie (o alle superficie) σ limitante S, oppure su questa vi è *aderenza* completa e allora, in entrambi i casi, è addirittura $\mathbf{v}=0$ sopra σ, altrimenti σ è superficie di flusso; in ogni caso adunque è soddisfatta la (15).

Per questa la terza delle (8) può scriversi

$$(19) \qquad W = \int_S \mu \mathbf{r} \times \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{rot}\, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \tfrac{1}{2} \text{grad}\, \mathbf{v}^2 \right] dS ,$$

e conseguentemente dalla (17), tenendo presente la (16), si deduce la seguente altra espressione dell'energia cinetica del sistema:

$$(20) \qquad 2T = \int_S \mathbf{r} \times \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} \mathbf{v} - \mu (\text{rot}\, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} - \tfrac{1}{2} \mu \text{grad}\, \mathbf{v}^2 \right] dS .$$

Un'ulteriore trasformazione ci consentirà di attribuire infine a T una terza espressione, coincidente, nel caso di fluidi incomprimibili, con noti risultati.

Dalla identità

$$\mu \mathbf{r} \times \text{grad}\, \mathbf{v}^2 = \text{div}\, (\mu \mathbf{v}^2 \mathbf{r}) - 3 \mu \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^2 \mathbf{r} \times \text{grad}\, \mu ,$$

moltiplicata per dS, si deduce, integrando a tutto S,

$$\int_S \mu \mathbf{r} \times \text{grad}\, \mathbf{v}^2 \, dS = -6T - \int_S \mathbf{v}^2 \mathbf{r} \times \text{grad}\, \mu \, dS - \int_\sigma \mu \mathbf{v}^2 \mathbf{r} \times \mathbf{n} \, d\sigma .$$

Per questa dalla (20) si può dedurre la seguente espressione di T:

$$(21) \quad T = \int_S \mathbf{r} \times \left[\mu (\text{rot}\, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} - \tfrac{1}{2} \mathbf{v}^2 \text{grad}\, \mu - \frac{\partial \mu}{\partial t} \mathbf{v} \right] dS - \tfrac{1}{2} \int_\sigma \mu \mathbf{v}^2 \mathbf{r} \times \mathbf{n} \, d\sigma .$$

7. *Fluidi omogenei incomprimibili.* — Se la massa fluida è incomprimibile e omogenea, risulta costante la densità μ; in tal caso la precedente assume la forma più semplice

$$(22) \qquad T = \mu \int_S \mathbf{r} \times [(\text{rot}\, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}] \, dS - \frac{\mu}{2} \int_\sigma \mathbf{v}^2 \mathbf{r} \times \mathbf{n} \, d\sigma ,$$

già valutata per via diretta e utilmente applicata [1].

Se il fluido si estende indefinitamente ed è in riposo all'infinito, oppure, movendosi in uno spazio limitato, *aderisce* in modo completo al con-

[1] Cfr. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge, 1916), pp. 211 e 212, espressioni (7) e (8). — Poincaré [*Théorie des tourbillons* (Paris, 1893), pag. 136] dà una dimostrazione diretta della (22) quando il fluido si estende indefinitamente e all'infinito è in riposo, per cui l'integrale di superficie scompare. Colgo l'occasione per rilevare un cambiamento di segno che va imposto alla formula di Poincaré, dato anche che la formula stessa è stata riportata con inesattezza [cfr. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, T. III (1921), pag. 470]. — L'errore di segno proviene dalla circostanza che i complementi algebrici degli elementi della prima riga del determinante D [v. Poincaré, loc. cit., pag. 136], designati con A, B, C, vanno cambiati di segno.

torno σ, l'integrale di superficie è nullo e la precedente espressione di T si riduce a

$$T = \mu \int_S r \times [(\text{rot } v) \wedge v] \, dS . \tag{23}$$

Scende da questa che se il fluido *effettivamente* si muove, cioè non è identicamente $v = 0$ in tutto lo spazio S, *non può* darsi che il movimento sia di tal natura per cui si abbia in ogni punto di S

$$r \times [(\text{rot } v) \wedge v] = 0 ; \tag{24}$$

infatti in tal caso dalla (23) scende $T = 0$ e quindi $v = 0$ in ogni punto di S, ciò che è contro l'ipotesi.

La (24) esprime che la velocità e il vortice sono ovunque complanari col vettore $r = P - O$. Moti di tal natura (che, come abbiamo dimostrato, sono per un fluido omogeneo incomprimibile, impossibili in un ambiente limitato, oppure in uno spazio illimitato ma in riposo all'infinito) costituiscono una categoria abbastanza generale che — per quanto io sappia — non è stata finora oggetto di particolare considerazione. Essa comprende, come casi particolari, i moti irrotazionali: per i quali $\text{rot } v = 0$, e i moti elicoidali di Beltrami [1], caratterizzati dal fatto che le linee di flusso coincidono colle linee vorticose, per cui $(\text{rot } v) \wedge v = 0$.

Geologia. — *Il grande « slittamento » delle masse calcaree secondarie dei monti Ausoni e Lepini sui terreni miocenici della Valle del Liri e della Valle Latina.* Nota del Corrisp. ing. SECONDO FRANCHI.

Fra i numerosi pozzi trivellati coraggiosamente eseguiti dalla Società « Petroli d'Italia » dal 1915 in poi nella bassa valle del Liri, tra S. Giovanni Incarico e Pico, il 1° è notevolmente produttivo fin da quell'anno, e l'ultimo, il 10°, compiuto mesi sono, dà la notevole produzione di litri 8000 al giorno, mentre alcuni hanno dato e dànno piccole produzioni, ed altri sono risultati finora completamente sterili.

Anche questi ultimi però sono molto interessanti, sì dal punto di vista scientifico che da quello pratico, per la luce che essi recano sulla costituzione litologica e geologica e sulla struttura tettonica di quelle regioni, dove esistono così interessanti manifestazioni di petrolio e di bitume e alle quali sembra sia riservato un prospero avvenire industriale.

[1] *Considerazioni idrodinamiche* [Rend. del R. Ist. Lombardo, vol. XXII (1889), pp. 121-130].

Fra quei pozzi sterili uno, quello scavato nelle vicinanze immediate di Pico, presenta un interesse singolarissimo dovuto al fatto che, essendo stato aperto nel terreno miocenico, costituente tutte le colline delle regioni basse, a soli 30 metri dal piede della montagna di calcari cretacei, esso arrivò alla profondità di m. 856 stando sempre nello stesso terreno, perciò senza incontrare il suddetto calcare che, per essere più antico, in condizioni normali doveva costituirne il substrato.

Da questo fatto singolarissimo e inatteso bisognava dedurre che la montagna, al disotto della superficie del terreno, non ha un profilo normale e che essa è, in parte almeno, *senza radici*. Per darcene una spiegazione si possono avanzare tre ipotesi diverse, supponendo cioè l'esistenza:

1°) di una grande frattura o faglia, la cui superficie separi verticalmente o con una certa pendenza verso mezzodì o verso ponente, i calcari dal terreno miocenico; e ciò con un salto enorme, non inferiore a 1200-1300 m.;

2°) di una grande piega anticlinale dei calcari cretacei, rovesciata verso nord sui terreni miocenici (*nappe du premier genre* di P. Termier);

3°) di un *carreggiamento* (*charriage*) o *falda di ricoprimento* dei calcari cretacei sul terreno terziario, per effetto di grandi spinte orogenetiche tangenziali (*nappe du deuxième genre* di P. Termier).

L'ing. G. Grzybowski, il quale aveva studiata la regione petrolifera per conto della Società Petrolî d'Italia, scelse la terza ipotesi come meglio rispondente ai fatti osservati, cioè quella del *carreggiamento* delle masse calcaree della destra del Liri sul Miocene, affermando che il Monte Leucio e gli altri minori, al pari di esso isolati in mezzo alla pianura, siano degli scogli calcarei *senza radici*, cioè *galleggianti* sul Miocene, quali relitti della erosione della coperta calcarea *carreggiata* continua (1).

L'ing. G. Grzybowski, oltre che sui risultati della profonda trivellazione di Pico, fondò la sua ipotesi sulla presenza entro a dei conglomerati miocenici (già indicati nelle Carte dell'Ufficio Geologico) nella vicina regione di Colle Grande, di blocchi di roccie cristalline, sconosciute e certamente non esistenti in posto, in tutto il bacino del Liri, e che dovevano provenire dalla *Tirrenide* (2). Quei blocchi difatti non avrebbero potuto giungere al punto in cui attualmente si trovano superando la grande muraglia calcarea, che ora separa la regione di Colle Grande dal mare.

(1) *Contributo agli studi sulla struttura geologica dell'Italia meridionale* (Boll. Soc. Geol. It., vol. XL, 1921, pag. 85).

(2) L'esistenza della Tirrenide, supposta da Forsith Mayor in base ad osservazioni biologiche (Cosmos, VII, 1883), è poi stata ammessa da tutti i geologi (compreso il grande maestro Edoardo Suess) i quali si occuparono della geologia dell'Appennino; e le osservazioni che si possono fare sulla costituzione litologica del Miocene del bacino del Liri sono atte a dare una luminosa conferma di tale esistenza, al largo della costa pontino-circea.

Qui però è doveroso ricordare che l'ing. C. Viola (1) era giunto fin dal 1896 alle stesse conclusioni riguardo alle origini dei blocchi rotolati e delle sabbie di roccie cristalline, rispettivamente dei conglomerati e delle arenarie della Valle Latina, il che è stato ignorato dal Grzybowski, come pare sia sfuggito ad altri geologi. Però il Viola supponeva che la erezione della grande muraglia calcarea della destra della Valle Latina fosse dovuta ad una faglia inversa (1ª delle precedenti ipotesi), cioè ad una parziale, anzichè ad una completa sovrapposizione, ossia ad un vero carreggiamento.

Nessuno può negare la grande importanza di questo argomento, a causa della dimostrazione lampante che esso ci porge, *che il deposito dei terreni miocenici che si osservano nella Valle Latina ed in quella del Liri è anteriore e non posteriore alla formazione di queste valli, e particolarmente alla erezione degli alti bastioni calcarei dei loro versanti di destra.*

Ora è facile intuire che se verrà dimostrato che essa corrisponda al vero, una nuova via si possa ritenere aperta alla interpretazione tettonica di molte altre parti dell'Appennino, e forse anche allargato il campo delle ricerche di petrolio. Donde la grandissima importanza scientifica e pratica dell'elegante quesito.

Conoscendo io un po' la regione, per avervi fatte alcune gite nella primavera del 1915, all'occasione del terremoto marsicano, mi sono persuaso che uno dei punti dove sarebbe stato possibile un primo controllo di quell'ipotesi fossero i dintorni di Falvaterra (2); e senza averne nessun incarico, ma solo per soddisfare il mio vivo desiderio di farmi una convinzione personale sull'attendibilità di quella seducente ed importantissima ipotesi, io colsi l'occasione di un ritorno dall'Italia meridionale, per dedicare alcune ore (5-6) alla visita dei dintorni di Falvaterra e di Colle Grande.

I fatti osservati in quella prima località sembrandomi di grande interesse, io ne riferii subito in una brevissima Nota, senza occuparmi della bibliografia che non riguardasse il soggetto del ricoprimento (3).

Il fatto principale da me osservato riguarda l'esistenza di una superficie di contatto meccanico pseudo-orizzontale fra calcari fratturati, con brecce e

(1) C. Viola, *Osservazioni geologiche fatte nella valle del Sacco in provincia di Roma e studio petrografico di alcune roccie* (Boll. R. C. G., 1896, pag. 4). Il Viola ha chiaramente affermato che la valle del Sacco è posteriore e non anteriore al deposito del terreno terziario che ne occupa il fondo, terreno assegnato all'Eocene, malgrado il ritrovamento da lui fatto, nei calcari di Ceccano, di una fauna prettamente miocenica con *Pecten Scabrellus*, studiata da Mayer-Eymar. Lo scambiare le Amphistegine per Nummuliti è un errore che si è ripetuto anche in tempi meno lontani.

(2) S. Franchi, *Sulla presenza di banchi di calcari con scutelle e con Amphistegina Niasi e di sedimenti planctonici nella formazione marnoso-arenacea della valle del Liri* (Boll. Soc. Geol. It., 1922, pag. 100).

(3) *Alcuni fatti a documentazione dei carreggiamenti della valle del Liri* (Boll. R. Uff. Geol., vol. XLVIII, 1920-21, n. 9).

specchi di frizione, i quali stanno sopra, e delle argille verdastre, che stanno sotto, inglobanti caoticamente ciottoli rotolati di roccie esotiche e frammenti di arenarie antigene. Un secondo fatto, pure molto significativo, il quale è conseguenza del precedente e ne costituisce armonicamente la conferma, è la rientranza, per circa 250 m., delle argille stesse nello stretto vallone calcareo. Un terzo infine è l'esistenza, a poca distanza dal vallone suddetto, di conglomerati con elementi di roccie cristalline esotiche, identici a quelli di Colle Grande. In quella Nota io citai altri fatti secondarî, quali la *milonitizzazione* dei calcari e l'ubicazione di fonti importanti lungo il limite inferiore di essi, pure riconoscendo esplicitamente, che essi potevano avere diversa interpretazione. Io concludevo quindi dichiarandomi favorevole all'ipotesi del carreggiamento.

Con una Nota pubblicata nei Rendiconti di questa Accademia [1] il chiarissimo prof. De Stefani, occupandosi del fenomeno tettonico in parola, dice che esso « *va escluso e non vi è alcuna traccia della sua esistenza* ». In questa Nota l'autore parla di osservazioni certo interessanti da lui precedentemente fatte (1902) sopra un lembo di Miocene con *Amphistegina* e sui depositi lacustri pleistocenici, fossiliferi presso Isoletta, osservazioni che saranno apprezzate al loro giusto valore da chi tratterà della geologia della regione in generale; ma egli non si occupa sufficientemente, a mio avviso, di dimostrare che la recisa affermazione della inesistenza del carreggiamento sia suffragata da fatti.

Mi sia permesso di ricordare ancora che gli argomenti principali finora addotti a sostegno di esso, lasciando da parte quelli secondarî, sono:

1°) il profilo geologico del pozzo trivellato di Pico;

2°) la presenza di blocchi, ciottoli e ghiaie di roccie cristalline estranee al bacino del Liri e all'adiacente Appennino, nelle puddinghe e nei conglomerati di Colle Grande, di Falvaterra e di altri punti della Valle Latina;

3°) il contatto meccanico anormale fra calcari soprastanti e le argille sottostanti, con ciottoli esotici, nel vallone di Falvaterra;

4°) la penetrazione del contorno del Miocene per circa 250 m. nello stesso vallone, fatto questo che è intimamente legato, come già dissi, al precedente, del quale anzi è una conseguenza.

Ora, leggendo la Nota del prof. De Stefani, si viene a constatare, non senza meraviglia, che egli omette completamente di parlare di quel primo argomento, il quale era certo il più importante per il sig. Grzybowski, come lo è per me, e lo dichiarai nella mia Nota, e lo sarà per tutti i geologi che si occuperanno di questo bellissimo e grande quesito, e che è, per di più, quello dal quale certamente è nata l'idea del carreggiamento.

Io potrei senz'altro esimermi dal proseguire in questa mia risposta; ma vale la pena di esaminare come siano stati confutati gli altri argomenti.

[1] Questi Rendiconti, fasc. 1-2, 1923, 2° sem., pag. 4.

Quanto al secondo, quello della presenza di blocchi di roccie cristalline nei conglomerati, il prof. De Stefani, non avendo forse visitati quelli di Colle Grande, dove la loro interstratificazione nel Miocene è molto chiara, li ritiene come provenienti da qualcuno di « quella serie numerosa di vulcani, da quelli del Sacco a Roccamontina », o come elementi rotolati o come proietti (errore questo in cui già cadde il Branco), perciò sempre di origine quaternaria, mentre essi provengono indubbiamente da depositi miocenici.

E qui è opportuno osservare che l'ing. Viola, pure avendo studiato petrograficamente i materiali di tutti i vulcani della valle del Sacco (loc. cit., roccie leucitiche svariatissime e alcuni tipi di basalti) non ha mai pensato che esse si potessero confondere coi blocchi di *granito* e *sienite* o di roccie cristalline in genere, da lui pure osservati, come già si disse, in varî punti della valle del Sacco e alla vetta del Monte Caccume, a 1000 metri di altitudine.

Il terzo argomento si può dire non sia stato discusso, sebbene esso riguardi fatti molto chiari, anzi tangibili; e per il quarto il De Stefani ritiene che il terreno argilloso rientrante nel vallone di Falvaterra sia materiale depostovi orizzontalmente da un lago pleistocenico occupante, oltre la bassa Valle del Liri, buona parte della Valle Latina.

Io non voglio discutere se i depositi lacustri del lago, detto Lago Lirino da O. Ferrero, siano giunti fino a quell'altezza, ma posso affermare che le argille a struttura confusa « inglobanti caoticamente ciottoli perfettamente rotolati di roccie varie, tutte diverse da quelle dei monti circostanti, e frammenti di straterelli di arenarie policrome, talora diaspigne, che dovevano formare degli interstrati fra le argille del deposito primitivo » non possono rappresentare un deposito lacustre. Sulla stessa formazione io aggiungevo: « questi strati sono stati, per violento impasto del terreno, dislocati e rotti, con un fenomeno analogo a quello del *Wildflysch* dell'Eocene delle regioni alpine dislocate o carreggiate ».

Per quanto « mal pratico » io mi lusingo che nessuno mi vorrà credere capace di scambiare un terreno così descritto con un deposito lacustre.

Concludendo, io posso affermare, con tutta tranquillità, che il valore degli argomenti più importanti addotti a sostegno dell'ipotesi del carreggiamento avanzata dal sig. Grzybowski e di quelli con cui io credetti di appoggiarla non è stato intaccato colla Nota del chiarissimo prof. De Stefani.

Ed ora, dopo la discussione fatta e l'attento esame delle Carte inedite della regione, esistenti presso l'Ufficio Geologico, rilevate or son trenta anni, ma contenenti, sebbene incomplete, dati preziosi, io credo di poter affermare che l'esistenza della falda di ricoprimento in parola può essere dimostrata in due distinti modi: *a*) partendo dal solo profilo del pozzo di Pico e senza ricorrere all'argomento dei blocchi di roccie cristalline; *b*) partendo invece da questo argomento, e prescindendo dal pozzo di Pico. Proviamoci.

a) Si disse che per spiegare il profilo del pozzo di Pico, quando si vogliano escludere i due modi di ricoprimento indicati, del primo e del secondo genere di Termier, sia necessario ricorrere ad una enorme faglia inversa, cui corrisponda un salto di almeno 1000 e forse anche di 1300 metri. Ora, una così straordinaria superficie di frattura: 1°) sarà poco discosta da una superficie piana per una grande estensione; 2°) dovrà separare nettamente due regioni costituite da terreni di orizzonti molto diversi, e delle quali, nel caso nostro, una dovrebbe essere essenzialmente cretacea e l'altra esclusivamente miocenica; 3°) avrà una traccia caratterizzata da una più o meno larga zona di breccie con specchi di frizione, roccie milonitizzate, ecc. (1). Inoltre la regione calcarea, perchè portata in alto dal salto e perchè più resistente all'erosione, sarà in grande rilievo su quella miocenica.

Orbene, una sola superficie di contatto meccanico, passante pel piede del monte calcareo a tergo di Pico, può soddisfare a tutte le condizioni sopra indicate, ed è *quella che ha per traccia la linea limite fra calcari cretacei e terreni miocenici*; ma naturalmente il contatto meccanico non è più faglia, ma carreggiamento, e il salto si deve ora chiamare slittamento, e invece di 1300 metri potrà essere di parecchi chilometri e non minore di 4 o 5; e quella superficie perciò costituirà proprio la *superficie di slittamento* della falda di ricoprimento di cui si discute.

A conferma di quanto sopra si è affermato, un ristretto lembo di quella superficie con breccie e specchi di frizione è appunto visibile nel vallone di Falvaterra, così come io affermai nella mia Nota.

b) Per la seconda dimostrazione occorre sfruttare fino alle sue ultime conseguenze l'argomento dei blocchi esotici di roccie cristalline e la deduzione che ne traemmo, della conseguente posteriorità della formazione o incisione della Valle Latina rispetto al deposito del Miocene che ne costituisce il fondo, e specialmente della posteriorità, rispetto a questo terreno, dell'alta parete calcarea del versante destro e dei monti calcarei isolati, i quali ne sono stati separati dai processi di prolungata erosione. Questo fatto è molto evidente per i monti Oro e Mandrone, a levante di Pico, e per il gruppo allungato Campo Lupino-Monte Siserno, il quale, sebbene parte del suo versante destro, si mostra isolato tra la Valle Latina e i due rami dell'Amaseno Pontino, ed è circondato dal Miocene.

Mettiamoci sott'occhio le carte geologiche della regione (Tav. al 50,000 di Anagni, Carpineto Romano, Frosinone, Fondi, Arpino e Pontecorvo) e teniamo ben presente che il Miocene, che vediamo seguire in tutti i suoi complicatissimi contorni (con golfi profondi e frastagliati, come quello di

(1) Nell'Alta Valtellina, lungo una grande frattura, avente 30 km. di estensione e 300-400 m. di salto, la zona di frizione, al contatto di roccie calcaree e di roccie dolomitiche del Lias e del Trias medio, raggiunge 50 m. di potenza (S. Franchi, *Notizie preliminari sulla geologia dell'Alta Valtellina*. Boll. Soc. Geol. It., vol. XXX, 1911).

Pico, con promontori sporgentissimi, come quello di Monte della Guardia, con penisolette allungate come quelle del Monte Nero e di Castro dei Volsci, e isole più o meno grandi) il piede dei monti calcarei, a causa della dimostrata sua anteriorità alla venuta di questi monti nella loro posizione attuale, *non può ritenersi sia stato depositato come entro ad un fjord*, come le apparenze farebbero credere. Allora noi dobbiamo necessariamente giungere a questa conclusione: *che quel Miocene deve costituire il substrato di tutte quelle masse calcaree, che sono le ultime arrivate.* Solo attraverso ad esse, per continuata erosione, esso venne messo allo scoperto ovunque: negli intagli stretti della Forma dell'Olivo e di Esperia, nello slargo di Pico, nei singolarissimi valichi di Castro dei Volsci e di Giuliano di Roma, i quali sono appunto scavati nel Miocene, lungo i due rami dell'Amaseno Pontino, che da quelli scendono, e nel lontano fosso di Montelanico (1).

L'armonia delle conclusioni tratte partendo da due ordini di fatti assolutamente distinti e indipendenti uno dall'altro, parmi sia sufficiente per darci la certezza assoluta della esistenza del ricoprimento o carreggiamento dei Monti Ausonî e Lepini, il quale perciò si può ritenere sia passato dallo stato di *ipotesi* a quello di *fatto dimostrato*. Le finestre tettoniche di Montelanico e dell'Amaseno ce ne dànno la dimostrazione più intuitiva.

Riservandomi di darne più ampie documentazioni, io credo di poter concludere. Le grandi masse di calcarî secondarî, presentanti scoscese pareti nell'alto dei versanti di destra della Valle Latina, del Liri, dell'Ausente e dei due rami dell'Amaseno Pontino, sono state sospinte, per *slittamento* o *carreggiamento*, con una fronte di oltre 70 km., sopra i terreni terziari (miocenici) che ora ne costituiscono anormalmente il substrato, e che la prolungata erosione ha messo a nudo: nell'ampia insenatura Pico - S. Giovanni Incarico, nella singolarissima *finestra tettonica*, a forma di *V*, dell'Amaseno e in quella molto ristretta, ma tipica, di Montelanico.

(1) Questa argomentazione sarà più facilmente capita in tutto il suo valore quando si abbiano sott'occhio le carte geologiche.

NOTE PRESENTATE DA SOCI.

Matematica. — *Soluzione di un'equazione differenziale la cui funzione incognita è indice di derivazione.* Nota di P. Scatizzi S. J. presentata dal Socio V. Volterra.

La somma difficoltà che si riscontra nella soluzione delle equazioni differenziali, fa pensare alla ricerca di una nuova via, che ponga cioè il problema sotto un altro punto di vista. Ci si potrebbe, per esempio, proporre di trovare l'indice di derivazione adatto a trasformare l'equazione data in un'altra più semplice o facilmente solvibile. In tal caso è chiaro che s'impone lo studio di derivate ad indice variabile. Comunque, volendoci orientare verso tale direzione, simili derivate riusciranno, anche considerate in se stesse, uno strumento analitico più potente delle comuni derivate e di quelle ad indice numero reale qualunque. Lagrange asseriva che la derivazione generalizzata sarebbe stata la chiave del futuro calcolo (1). Abel, Liouville e le stesse teorie di Volterra ci riportano, come mostrai, verso questo campo. Recentissime ricerche del Lévy, che per mezzo delle derivate ad indice frazionario ampliato riesce a risolvere equazioni integrali doppie, partendo dalla definizione del Riemann, confermano il mio asserto. L'occasione che dette origine a quest'ordine d'idee è stato il seguente problema:

« *Date due funzioni* $F(x, y, z \ldots)$ *ed* $f(x)$ *arbitrarie, purchè la seconda si annulli convenientemente per* $x = -\infty$, *esiste o no un indice* $s(x, y, z, \ldots)$ *tale che verifichi l'equazione*

$$[1] \qquad F(x, y, z \ldots) = \mathrm{D}^{-s(x\,y\,z\ldots)} f(x) \quad ? \text{ ».}$$

Le $x, y, z \ldots$ sono delle variabili indipendenti. Meno generalmente, si tratterebbe di risolvere l'equazione

$$[2] \qquad F(x) = \mathrm{D}^{-y} f(x)$$

dove y è la funzione incognita. Che un tale problema abbia un senso reale, e sia possibile, basterà dimostrarlo con qualche esempio. Ma prima conviene

(1) Lagrange, Berlin. Mem., 1772, pag. 186.

definire due specie di derivate: una ad indice variabile semplice, l'altra a doppio indice, della seguente forma:

$$[\alpha] \qquad \mathrm{D}_2^{-y(x)} f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{y(x)-1}}{\Gamma(y(x))} f(\xi)\, d\xi$$

$$[\beta] \qquad \mathrm{D}_2^{[-y,\lambda]} f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda(\theta)\, d\theta}{x} \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{y(\theta)-1}}{\Gamma(y(\theta))} f(\xi)\, d\xi .$$

Come si vede, $[\alpha]$ è la medesima derivata Liouville–Molinari in cui si è sostituito, all'indice m costante di D_1^{-m} la funzione $y(x)$. Tale sostituzione è lecita, sia perchè l'integrale passa soltanto per ξ, sia perchè il senso analitico sostanzialmente permane, estendendosi a quello di variarsi l'ordine di derivazione lungo tutto l'intervallo.

Quanto alla derivata $[\beta]$ essa è funzione di $[\alpha]$ con l'aggiunta di un senso d'isteresi al valore dell'indice. Ossia si tien conto di tutta la serie dei valori costanti che l'indice $y(x)$ si suppone abbia dovuto assumere per giungere, variando, da $y(0)$ (con la condizione che $y(0) = \text{cost.}$) ad $y(x)$. Vi è poi l'aggiunta di una *funzione ausiliaria* $\lambda(x)$ arbitraria (con qualche comune condizione) e può anche prendersi costante. Lasciando ad altro tempo la dimostrazione della sua proprietà addittiva, basterà qui notare che:

1°. Per $y = k = \text{cost}$ la $\mathrm{D}_2^{[-k,\lambda]}$ si riduce alla D_1^{-k} di Liouville. Basterà infatti porre $\lambda = 1$

$$\mathrm{D}_2^{[-k,1]} f(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{D}_1^{-k} f(x) \frac{d\theta}{x} = \mathrm{D}_1^{-k} f(x) .$$

2°. Ha la proprietà distributiva. Infatti

$$\mathrm{D}_2^{[-y,\lambda]} (a\varphi(x) + b\psi(x)) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-y(\theta)} (a\varphi(x) + b\psi(x))\, \lambda(\theta)\, d\theta =$$

$$= a \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-y(\theta)} \varphi(x)\, \lambda(\theta)\, d\theta + b \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-y(\theta)} \psi(x)\, \lambda(\theta)\, d\theta =$$

$$= a \mathrm{D}_2^{[-y,\lambda]} \varphi(x) + b \mathrm{D}_2^{[-y,\lambda]} \psi(x) .$$

Faccio notare che $\mathrm{D}_2^{-y(\theta)}$ si può considerare come ad indice costante, rispetto ad x, quindi gode della proprietà distributiva al pari di D_1^{-m}.

Propongo ora un esempio della [1], specificando $f(x) = xe^x$. Avremo da risolvere l'equazione

$$\mathrm{F}(x, y, z \ldots) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{s(x,y,z)-1}}{\Gamma(s(x, y, z \ldots))} \xi e^{\xi} d\xi$$

rispetto alla $s(x, y, z \ldots)$. Noto che l'integrale è convergente.

Dalla trasformazione $x - \xi = \eta$, trarremo successivamente:

$$F(x, y, z \ldots) = \int_0^{\infty} \frac{\eta^{s-1} e^{-\eta} x e^{x} d\eta}{\Gamma(s)} - \int_0^{\infty} \frac{\eta^{s} e^{-\eta} e^{x} d\eta}{\Gamma(s)}$$

$$F(x, y, z \ldots) = x e^{x} \frac{\Gamma(s(x,y,z,\ldots))}{\Gamma(s(x,y,z \ldots))} - e^{x} \frac{\Gamma(s(x,y,z,\ldots)+1)}{\Gamma(s(x,y,z \ldots))}$$

$$F(x, y, z \ldots) = x e^{x} - e^{x} s(x, y, z \ldots)$$

$$s(x, y, z \ldots) = x - e^{-x} F(x, y, z, \ldots).$$

Onde l'identità

$$F(x, y, z \ldots) = \mathrm{D}_2^{e^{-x} F(x, y, z \ldots) - x} x e^{x}.$$

Così pure è facile verificare che si ha identicamente

$$F(x\, y\, z \ldots) = \mathrm{D}_2^{\frac{1}{\log m}[\lg F(x\, y\, z \ldots) - m r]} e^{m x}.$$

E in generale, l'equazione

$$F(x, y, z \ldots) = \mathrm{D}_2^{[-u, \lambda]} f(x)$$

ci conduce all'inversione dell'equazione integrale

$$F(x\, y\, z \ldots) = \int_0^{x} \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-u(\theta)} f(x)\, \lambda(\theta)\, d\theta$$

di nucleo

$$K(x, \theta) = \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-u(\theta)} f(x).$$

Ma si ha che $|K(x\,\theta)| < \mathrm{M}$ nel triangolo d'integrazione, per la condizione a cui la $f(x)$ soddisfa secondo il problema in [1], infatti allora la $\mathrm{D}_2^{-u(\theta)}$ sarà convergente; basta aggiungere che si abbia $u(0) = \text{cost}$, e rimanga finita nell'intervallo $|0, x|$ come è ovvio.

Ponendo simbolicamente

$$\Phi(x, y, z \ldots) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{1}{K(x, x)}$$

con $K(x, x) = \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-u(x)} f(x)$ come in [α], non nullo, e ricordando che

$$\mathrm{D}_x \mathrm{D}_2^{-u(\theta)} f(x) = \mathrm{D}_2^{-u(\theta)+1} f(x),$$

e si chiama $s(x, \theta)$ il nucleo risolvente di $\frac{\frac{\partial}{\partial x} K(x, \theta)}{K(x, x)}$, otterremo

$$\lambda(x\, y\, z \ldots) = \Phi(x, y, z \ldots) + \int_0^x s(x, \theta)\, \Phi(\theta, y, z \ldots)\, d\theta$$

onde l'identità generale

$$F(x, y, z \ldots) = \mathrm{D}_2^{[-u,\, \Phi(x,y,z\ldots) + \int_0^x s(x,\theta)\, \Phi(\theta,y,z\ldots)\, d\theta]} f(x)$$

È chiaro che u rimane funzione arbitraria.

Infine, per risolvere il problema anche rispetto alla u, basta prendere $\lambda = \frac{u}{\mathrm{D}_2^{-u} f(x)}$, ma non ci si perviene che con approssimazioni successive secondo l'analisi di Lalesco, come il lettore potrà verificare facilmente da sè.

Fisica. — *Variabilità dell'assorbimento dell'atmosfera solare.* Nota del prof. A. Amerio, presentata dal Socio Cantone.

In una Nota precedente riguardante « L'attività del Sole e la costante solare », ho detto che sto eseguendo da due anni delle misure della distribuzione dell'energia sul disco solare, misure che ora sto proseguendo colla massima continuità consentitami dalle occupazioni, dal tempo e dalla poca comodità con cui attualmente le posso eseguire.

Poichè con quelle fatte sinora sono riuscito a rendere evidente l'esistenza di variazioni che questa distribuzione subisce da un giorno all'altro, riferisco in proposito.

Queste determinazioni mirano esclusivamente a ricercare le eventuali variazioni del potere assorbente dell'atmosfera solare, perciò non ho ritenuto conveniente estenderle a molti punti del disco. La ragione è che, quando si passa dal centro del disco a 15° e a 30°, si ottengono piccole differenze tra le rispettive radiazioni, per cui le loro variazioni possono essere dell'ordine di grandezza degli errori di misura, pei 45° queste variazioni sono di poco superiori; mentre per 60° e meglio ancora per 75° li superano di molto. Mi convenne quindi limitare le misure alle radiazioni del centro e dei punti a 60° e a 75° per determinare i rapporti tra queste e la prima. Con ciò si aveva anche il vantaggio di poter eseguire le serie rapidamente, evitando più facilmente le eventuali variazioni atmosferiche che avrebbero potuto perturbarle.

Allo scopo di ridurre a quantità trascurabili l'effetto già di per sè non tanto grande dell'atmosfera terrestre (1), feci le misure intorno al mezzodì di ogni giornata in cui l'atmosfera fosse molto limpida, e ogni volta eseguivo da due a cinque serie.

Il metodo è quello già altre volte descritto (2); solo come perfezionamento ho aggiunto un cannocchialetto per osservare la posizione dell'immagine del Sole sopra la cartella a doppia parete che copre la faccia anteriore del pireliometro. La regolazione può così esser molto più accurata che a occhio nudo, in modo da non commettere un errore superiore a mezzo mm.

Un tale errore mi cagiona nella determinazione dei rapporti sopradetti delle differenze di 0,02 per la posizione di 60°, e di 0,06 per quella di 75°, e poichè il valore di uno di detti rapporti in ogni serie è la media di altri quattro, e si può contare sopra una media di oltre tre serie giornaliere, per i 38 giorni nei quali si poterono fare misure, il valore diurno di questi rapporti è determinato con un errore non superiore a 0,002 per la posizione di 60°, e di 0,006 per 75°.

I risultati sono riuniti nella tavola annessa (fig. 1), che comprende tutte le misure di quest'anno, dal 14 maggio al 31 ottobre.

Ogni suo punto rappresenta, colla sua ordinata, la media dei rapporti determinata con tutte le misure fatte nel giorno corrispondente all'ascissa, per ognuna delle due posizioni esaminate.

I rapporti determinati per 60° occupano la parte superiore della tavola; quelli corrispondenti a 75° la parte inferiore.

Come si vede, in giorni vicini i risultati sono per lo più prossimi, ma per giorni lontani si vedono differenze notevoli, che possono arrivare quasi al decuplo degli errori di misura, e sono generalmente nello stesso senso per le due posizioni esaminate.

Nè quando si riscontrano notevoli divergenze dal generale andamento parallelo dei due rapporti, si deve senz'altro dedurre che una delle due misure sia errata oltre ai limiti di errori sopracalcolati, in quanto non è detto che una variazione della trasparenza avvenga dovunque contemporaneamente, perchè anzi è più probabile che originatasi nella regione di una protuberanza, si diffonda più o meno rapidamente tutto intorno; inoltre la presenza di qualche facola può turbare qualcuna delle misure.

Nè mi pare che le variazioni trovate si possano in massima attribuire ad effetti delle facole, che trovandosi un po' nel centro, un po' a 60° e un po' a 75°, altererebbero variamente i rapporti in questione, perchè questi

(1) *Variazione diurna della distribuzione dell'energia sul disco solare.* Atti R. Acc. di Torino, vol. 57, 1922.

(2) Memorie Lincei, 1914. *Ricerche sullo spettro e sulla temp. della fot. solare*, pag. 336.

non potrebbero presentare quell'andamento generalmente quasi parallelo che hanno tanto nel complesso, quanto in quasi tutti i singoli gruppi di misure.

Infatti i due rapporti varierebbero nello stesso senso solo quando una facola fosse nel centro, oppure, caso molto più raro, quando due facole si

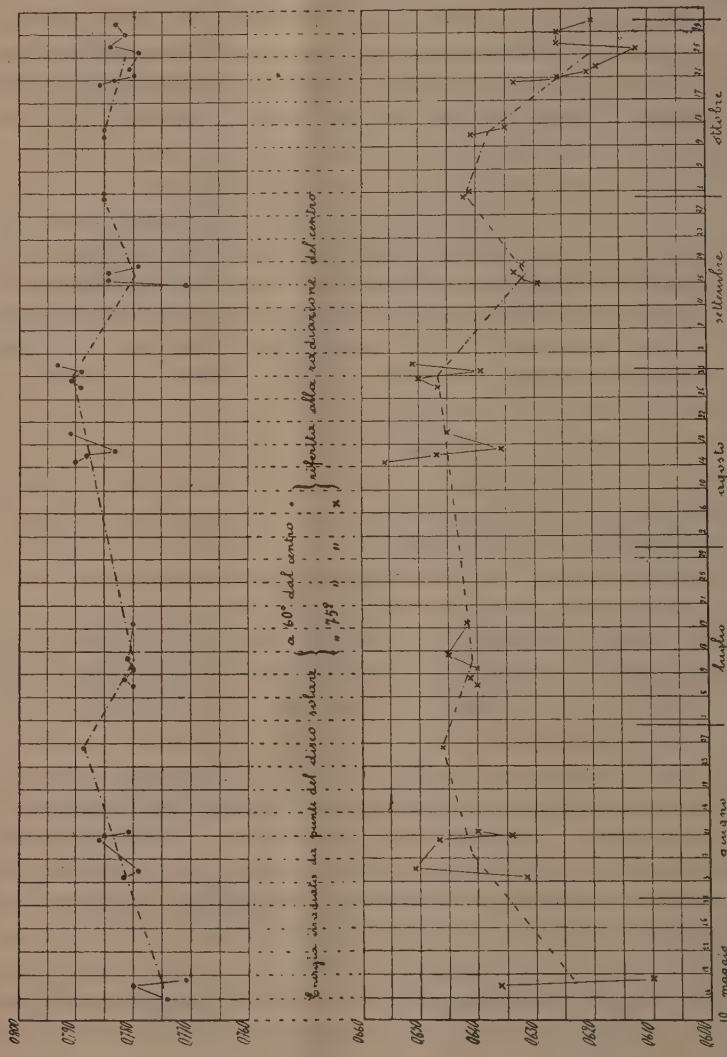

Fig. 1.

trovassero contemporaneamente una a 60° e l'altra a 75°. Nel primo caso si dovrebbero avere dei rapporti inferiori alla media, nell'altro dei valori superiori, ma data la relativa piccolezza delle facole, e la rotazione del Sole, non si dovrebbero avere per varî giorni consecutivi dei rapporti sempre superiori o sempre inferiori alla media, ciò che invece può ben essere attribuito

a variazioni del potere assorbente dell'atmosfera, che per la sua origine e per la sua natura può manifestarsi in regioni di enorme estensione.

Dalla tavola risulta dunque che l'atmosfera solare varia di trasparenza da un giorno all'altro e poichè non vi si scorge alcuna periodicità sincrona colla rotazione solare, le variazioni trovate devono realmente corrispondere a mutamenti che avvengono da un giorno all'altro nella massa atmosferica.

Ciò è conforme alle precedenti osservazioni di Abbot e mie, ed aumenta la probabilità che una più forte variazione si possa presentare a lunghi pe-

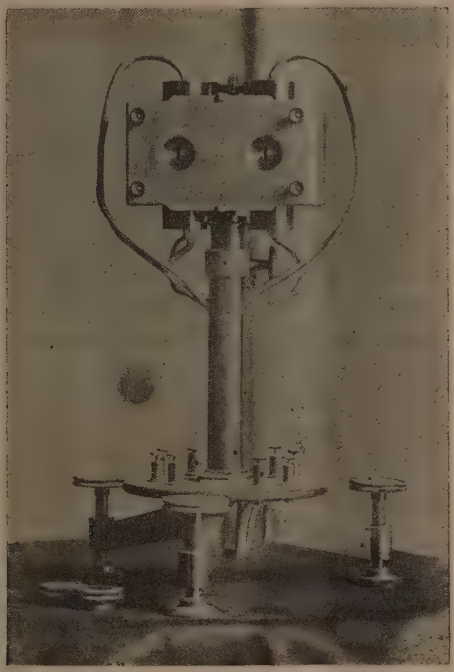

Fig. 2.

riodi, alla quale si debba attribuire la diminuzione che è stata osservata nella costante solare in occasione dei grandi numeri di macchie.

2. Per continuare questo studio in condizioni migliori, ho fatto costruire un apposito apparecchio che chiamo *Pireliometro doppio*, il quale mi deve permettere di determinare uno dei soliti rapporti con una sola lettura al galvanometro.

L'apparecchio è quello della fig. 2, e vi si vedono uniti due dei miei pireliometri integrali, in modo che i loro assi possano essere resi convenientemente convergenti.

Su di esso si fa cadere l'imagine del Sole, in modo che per una delle finestrine entri la radiazione centrale, e dall'altra quella che proviene da 60°.

Le correnti generate dalle due pinzette termoelettriche, sotto l'azione della radiazione del centro e dell'altro punto del disco solare, circolano in due telai galvanometrici eguali, rigidamente uniti, disposti in due piani verticali ad angolo retto, entro a un campo magnetico orizzontale, intenso ed uniforme.

Se la torsione della loro sospensione è trascurabile, la posizione di equilibrio dell'equipaggio mobile dipende dal rapporto delle due intensità di corrente, e precisamente, detto φ l'angolo che l'asse del primo fa col campo magnetico, I_1 la corrente che lo percorre, I_2 quella che circola nell'altro, la posizione di equilibrio si ha quando:

$$I_1 \operatorname{sen} \varphi = I_2 \cos \varphi$$

ossia:

$$I_2 = I_1 \operatorname{tang} \varphi .$$

Se le resistenze dei due circuiti sono eguali, le correnti sono proporzionali alle quantità di calore che colpiscono le due laminette del doppio pireliometro, e la tangente dell'angolo dà il rapporto cercato.

Per quanto il pireliometro doppio sia pronto, non ho ancora potuto fare delle misure con questo metodo, ma conto di iniziarle al più presto.

Ringrazio intanto vivamente il prof. G. B. Rizzo per la cordiale ospitalità concessami nell'Osservatorio geofisico da lui diretto, senza la quale non avrei potuto compiere questa ricerca.

Fisica terrestre. — *Legge armonica di propagazione dei telesismi.* Nota di GIULIO GRABLOVITZ, presentata dal Corrisp. L. PALAZZO.

È molto generalizzato l'uso delle tabelle basate sui concetti di Wiechert e Zoeppritz pel calcolo del tempo impiegato dalle fasi P e S (primi e secondi tremiti preliminari) nel percorrere un tratto di superficie terrestre a radiare dall'epicentro.

Le stesse che, calcolate da Geiger e Zeissig, si trovano diffuse in varie pubblicazioni ed abbracciano 13 megametri, vennero spinte anche oltre per extrapolazione, cioè fino a 150° = megametri $16\ ^2/_3$. Ed altri procedimenti vennero tentati per apprezzare in mancanza di sicure e positive osservazioni di fatto, il progresso di P e S fino agli antipodi.

Ad un altro particolareggiato lavoro ho riservata la dimostrazione della formola qui appresso, che si adatta con differenze inapprezzabili alla tabella che il Comitato sismologico della « British association for the advancement of Science » riproduce nei suoi bollettini per P e S. Essi differiscono talvolta di 1ˢ ed anche di 2ˢ da altre tabelle ed io non ho esitato ad attenermi alla medesima senza ritocchi, per approfittare dell'intiera escursione

di 150° a cui è spinta e dimostrare il suo adattamento a formola perfettamente armonica.

Ecco le formole che per mezzo d'operazioni matematiche, dapprima laboriose e complesse, poi semplicissime, sono riuscito a concretare, cioè:

$$P = 1131^{s}5 \operatorname{sen} \Delta:2 + 40.3 \operatorname{sen} 3\Delta:2 + 51.0 \operatorname{sen} 5\Delta:2 + 9.2 \operatorname{sen} 7\Delta:2 + 13.4 \operatorname{sen} 9\Delta:2 + 2.8 \operatorname{sen} 11\Delta:2$$

$$S = 2033^{s}7 \operatorname{sen} \Delta:2 + 91.8 \operatorname{sen} 3\Delta:2 + 61.6 \operatorname{sen} 5\Delta:2 + 30.5 \operatorname{sen} 7\Delta:2 + 18.7 \operatorname{sen} 9\Delta:2 + 8.5 \operatorname{sen} 11\Delta:2$$

nelle quali P ed S assumono il significato dei tempi decorsi fra l'istante all'epicentro e le fasi P e S ad una distanza angolare Δ dal medesimo.

I valori, con queste ricostruiti, di 15° in 15° e confrontati con la nota tabella suddetta, riescono:

Δ	P Tabella	P Formola	Diff.ª T-F	S Tabella	S Formola	Diff.ª T-F
15°	219	216.6	+2.4	392	388.0	+4.0
30°	388	390.3	—2.3	694	695.7	—1.7
45°	513	513.1	—0.1	915	916.8	—1.8
60°	612	612.1	—0.1	1103	1101.3	+1.7
75°	709	707.4	+1.6	1286	1284.7	+1.3
90°	796	797.5	—1.5	1454	1456.9	—2.9
105°	874	874.4	—0.4	1602	1603.5	—1.5
120°	942	941.2	+0.8	1729	1726.9	+2.1
135°	1009	1007.7	+1.3	1833	1834.3	—1.3
150°	1071	1072.7	—1.7	1917	1918.3	—1.3
			Errore medio 1.32			Errore medio 1.96
165°		1124.2	» probabile 0.32		1967.8	» probabile 0.54
180°		1143.6			1983.2	
195°		1124.2			1967.8	

e così potrebbero procedere fino a 360°, ritorno all'epicentro, per un cerchio massimo qualunque, compiuto il quale tutti i valori andrebbero riproducendosi con segno negativo, trasportandoci in uno spazio di tempo immaginario, ma perfettamente identico.

A primo aspetto la formola applicata può parere del tutto empirica; essa invece s'appoggia a considerazioni teoriche scevre d'ogni concetto azzardato od arbitrario sulla costituzione interna del globo, ma fondate sul criterio della libera propagazione del primo impulso sismico per onde longitudinali e trasversali attraverso una sfera di densità progressivamente crescente dalla superficie al centro.

In altra pubblicazione seguiranno le considerazioni che mi condussero ad un tale risultato, ma premetto che i coefficienti numerici non possono considerarsi definitivi che in rapporto alla tabella cui fanno capo, perchè questa in sostanza, com'è ben noto, si basa su tre soli terremoti semimondiali vale a dire:

a) il terremoto delle Indie del 4 aprile 1905 osservato fino ad una distanza massima di chm 5680,

b) il terremoto della Calabria dell'8 settembre 1905 con distanza massima di chm 7670 e

c) il terremoto della California estendentesi a chm 11110; i quali sono veramente pochi e di scarsa estensione per fondarvi una tabella definitiva estesa al mondo intiero.

Esistono altri elenchi i quali guadagnano quasi gli antipodi, ma i dati più incerti e più che altro ritardati per dubbia sensibilità ai tremiti preliminari delle due specie sono quelli della plaga antipoda i quali forniscono una parvenza di velocità ridotte, che autorizza formole includenti persino velocità paradossali, perchè considerate di movimento lungo la superficie.

Attualmente si sta rifacendo lo spoglio di tutti i telesismi qui registrati dal 1896 in poi, per ricavare la così detta durata dei tremiti preliminari o più propriamente il tempo che intercorre fra l'inizio di P e quello di S, senza considerare se i P perdurano anche dopo l'ingresso degli S.

Nell'eseguire tale spoglio vengono scartati senza pietà i casi menomamente dubbî e posso già ora dire che un terremoto quasi antipodale (Nuova Zelanda) mi rivela con tutta sicurezza una lieve eccedenza rispetto alle tavole.

Perciò i coefficienti delle formole suesposte non possono riguardarsi definitivi, ma modificabili in base ad un più esteso materiale di sicure osservazioni.

Ritengo per altro che le formole stesse siano sufficienti per ora a fornire un criterio più appropriato sugli effetti da aspettarsi agli antipodi, anzi in una zona quasi emisferica antipodale, ove la determinazione di P e S, a differenza delle superficiali L e conseguenti, riesce d'una enorme incertezza. Credo pure che dalla conveniente applicazione di siffatta formola possa scaturire con soddisfacente approssimazione l'istante epicentrale, che più o meno, rimane sempre avvolto nel dubbio e nell'incertezza, di che sembrano già dare indizio gli errori residui emergenti per assoluta superiorità nel tratto più prossimo all'epicentro.

Naturalmente in ciò può aver parte la non per ora considerata profondità dell'epicentro.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nelle sedute del 6 gennaio e 3 febbraio 1924.

Antoniazzi A. M. — Esperimenti fatti per determinare a mezzo della radiotelegrafia le differenze di longitudine fra Genova, Milano, Napoli e Padova (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXXII, pp. 295-307). Venezia, 1923. 8°.

Atti del II Congresso internazionale di medicina e farmacia militare sotto l'alto patronato di S. M. il Re (voll. I, II). Roma, 1923. 8°, pp. I-IV, 1-411; I-VIII, 1-585.

Baillaud B. — Note sur la précision des signaux horaires émis de 1910 au 31 décembre 1919 par le Bureau international de l'heure à Paris (Repr. from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », volume LXXXII, n. 8, pp. 492-493). London, 1922. 8°.

Baillaud M. B. — Paroles prononcées a Chartres aux obsèques de J. B. A. Gaillot. Paris, s. d., 8°, pp. 1-4.

Baillaud M. B. — Sur un nouvel instrument des passages récemment installé à l'Observatoire de Paris (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences », tome 175, 1922). Paris, 1922. 4°, pp. 1-4.

Baruzzi M. — Studio sulla serie naturale dei pesi atomici in rapporto alla costituzione del nocciolo degli atomi (Estr. dagli « Atti della Società dei naturalisti e matematici di Modena », vol. VII). Modena, 1923. 8°. pp. 1-38.

Battaglia M. — Sulla diversità del treponema pallidum (Estr. dalla « Riforma medica », anno XXXIX, n. 32). Napoli. 1923. 8°, pp. 1-5.

Batich R. — La concorrenza tra Trieste e Fiume nell'anteguerra. Venezia, 1923. 8°, pp. 1-28.

Berzelius J. — Brev. Bd. 4, 2a. Uppsala, 1922 8°, pp. 1-217.

Cesàro G. — Quadrilataires dans lesquels l'ellipse minima circonscrite devient circulaire (Extr. des « Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège », tome XII). Bruxelles, 1923. 8°.

Cesàro G. — Sur l'equiorientation et la similitude de l'ellipse d'inertie et de l'ellipse de Steiner dans le triangle (Extr. des « Bulletins de la Classe des sciences de l'Académie Royale de Belgique », pp. 185-197). Bruxelles, 1923. 8°.

Cesàro G. — Sur la forme cristalline de l'atoxyl (Extr. des « Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège », tome XII). Bruxelles, 1923. 8°. pp. 1-11.

Cesàro G. — Sur les ellipses circonscrites à un trapèze (Extr. des « Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège », tome XII). Bruxelles, 1923. 8°, pp. 1-16.

Cesàro G. — Sur quelques lieux géométriques relatifs aux triangles ayant leur ellipse de Steiner commune (Extr. des « Mémoires publiés par la Classe des sciences de l'Académie Royale de Belgique », tome V). Bruxelles, 1923. 4°, pp. 1-36.

Cevidalli A. — I veleni quali fattori di malattia (Trattato di anatomia patologica, n. XI). Torino, 1923. 8°, pp. 1-60.

Crespi A. — Il moto oscillatorio pendolare e le ideali celesti rivoluzioni. s. l., 1924. 8°, pp. 1-56.

De Angelis d'Ossat G. — La stazione geotermica di Perugia (Estr. dal « Bollettino bimensile », nn. IV-VI). Mondovì, 1923. 4°, pp. 1-6.

De Angelis d'Ossat G. — La leucite per l'agricoltura (Estr. dalla « Rassegna internazionale di agronomia », vol. I. pp. 309-320). Roma, 1923. 8°.

De Astis G. — Gli acidi del mosto e del vino. Catania, 1924. 8°, pp. I-XI, 1-457.

De Vecchi B. — Teratologia generale (Trattato di anatomia patologica, vol. IV). Torino, 1923. 8°, pp. I-VIII, 1-206.

Evolución da las Ciencias en la república Argentina: III. Las ciencias quimicas. VII. Los estudios botanicos. Buenos Aires, 1923. 8°, pp. 1-17; 1-167.

Gigli T. — Oppio nazionale (Estr. dal « Bollettino chimico farmaceutico »). Como, 1923. 8°, pp. 1 4.

Guizzetti P. — Sistema nervoso (Trattato di anatomia patologica, vol. X). Torino, 1924. 8°, pp. I-VII, 1-320.

King E. — Photovisual magnitudes of one hundred bright Stars (Repr. from the « Proceedings of the natural Academy of Sciences », vol. IX, n. X, 1923, pp. 345-349). Washington, 1923. 8°.

Laguesse E. — Flots endocrines du pancreas, insuline et diabète (Extr. de la « Revue française d'Endocrinologie », tome I, n. 4, 1923, pp. 281-311). s. l., s. d. 8°.

La Touche P. — Bibliography of Indian Geology (pars III). Calcutta, 1923. 8°, pp. 1-348.

Lecat M. — Développement des déterminants en fonction de déterminants à espace axial vide (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », tome XLII, pp. 205-215). Louvain, 1923 4°.

Lecat M. — Extension d'un théorème de Boehm généralisant la loi de multiplication de deux détérminants ordinaires (Estr. dai « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », volume XLVII, 1923). Palermo, 1923. 8°, pp. 1-6.

Lecat M. — Généralisations et modifications d'un théorème de Frobenius (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », vol. XLII, pp. 322-329). Louvain, 1923. 8°.

Lecat M. — Remarques sur divers points de la théorie des déterminants (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », tome XLII, pp. 215-225). Louvain, 1923. 8°.

Lecat M. — Sur diverses formes remarquables des produits et puissances de trois Codéterminants cubiques (deuxième communication) (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », tome XLI, pp. 305-315). Louvain, 1922. 8°.

Lecat M. — Sur l'adjoint d'un déterminant (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », tome XLII, pp. 65-75). Louvain, 1922. 8°.

Lecat M. — Sur les déterminants cayléens et bicayléens anormaux (Sonderabd. aus « Mathematische Zeitschrift », Band XV, pp. 291-308). Berlin, 1923. 8°.

Lecat M. — Sur les permanents cayléens et sur les déterminants cayléens anormaux, provenant de deux matrices de classes quelconques (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », tome XLII, pp. 76-81). Louvain, 1922. 8°.

Lecat M. — Sur les sections d'un déterminant (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles », tome XLIII, 1923-24, pp. 21-32). Louvain, 1923. 8°.

Luyten W. J. — On the mean absolute magnitudes of the K and M giants and the systematic errors in triconometric parallaxes (Repr. from the « Proceedings of the national Academy of Sciences », vol. IX, n. 9, pp. 317-323). s. l., 1923. 8°.

Mascart J. — Climatologie du département du Rhone. Application à une assurance mutuelle contre la grêle. s. l., 1923. 8°, pp. 1-30.

Mascart M. J. — La proportion des réussites dans la prévision du temps (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences », tome CLXXV, 1922). s. l., s. d. 4°, pp. 1-3.

Mascart J. — Travaux scientifiques. Paris, 1905. 8°, pp. 1-164.

Parker S. L. — On the influence of density of population upon the rate of reproduction in Drosophila (Repr. from the « Proceedings of the national

Academy of Sciences », vol. VIII, n. VII, pp. 212-219). s. l., 1922. 8°.

Pearl R. — A further note on the age index of a population (Repr. from the « Proceedings of the national Academy of Sciences », vol. VIII, n. X, 1922, pp. 300-303). s. l., 1922. 8°.

Pearl R. — A further note on the mathematical theory of population Growth (Repr. from the « Proceedings of the national Academy of Sciences », vol. VIII, n. XII, 1922, pp. 365-368). s. l., 1922. 8°.

Pearl R. — Biometrical studies in pathology: II. Pathometric index numbers (From the « Johns Hopkins Hospital Bulletin », vol. XXXIII, pp. 405-412). s. l., 1922 8°.

Pearl R. — Experimental studies on the duration of life (Repr. from the « American Naturalist », pp. 312-321; 385-405). s. l., 1922. 8°.

Pearl R. — New experimental data on the influence of density of population upon duration of life in Drosophila (preliminary note) (Repr. from the « American Journal of Hygiene », vol. III, n. I, pp. 94-97). s. l., 1923. 8°.

Pearl R. — On the influence of density of population upon the rate of reproduction in Drosophila (Repr. from the « Proceedings of the national Academy of Sciences », vol. VIII, n. VII, pp. 212-219). s. l., 1922. 8°.

Pearl R. — Preliminary discussion of the correlation between illiteracy and mortality in american cities (Repr. from the « American Journal of Hygiene », voi. II, n. 5, 1922, pp. 587-600). s. l., 1922. 8°,

Pearl R. — The age at death of the parents of the tuberculous and the cancrous (Repr. from the « American Journal of Hygiene », vol. III, n. 1, 1923, pp. 71-89). s. l., s. d. 8°.

Pearl R. — The population problem (Repr. from the « Geographical Review », vol. XII, n. 4, 1922, pp. 636-645). s. l., s. d. 8°.

Pearl R. — The statistical evaluation of public health activities (Repr. from the « American Journal of Public Health », 1922). s. l., 1922. 8°, pp. 1-7.

Pearl R. — United States life, tables 1890, 1901, 1910, and 1901-1910 (Repr. from « Science ». vol. LVI, n. 1461, 1922, pp. 756-757) s. l., s. d. 8°.

Scipioni S. — Razze ovine italiane, con prefazione del prof *G. De Angelis d'Ossat* su gli antenati degli ovini. Catania, 1924. 8°, pp. 1-70.

Silvestri F. — Descripción de un neuvo género de Polydesmidae (Myriopoda, Diplopoda) de España meridional (Extr. del « Boletin de la Real Sociedad Española de Historia Natural », tomo XXIII, pp. 568-575). Madrid, 1923. 8°.

Studies from the laboratories of the Philadelphia general hospital (vol. I). Philadelphia, 1920-1923, pp. 1-354.

Tables annuelles de constantes et données numériques de chimie, de physique et de technologie, 1921-22. Paris, 1922. 4°, pp. 1-17; 1-20; 1-13.

Tonelli L. — Fondamenti di calcolo delle variazioni (vol. II). Bologna, 1923. 8°, pp. I-VIII, 1-660.

Usai G. — Relazioni fra funzioni biometriche (Estr. dal « Giornale di matematica finanziario »), vol. V. Genova, 1923. 8°, pp. 1-14.

Usai G. — Sopra una determinazione di funzioni di Sturm dovuta al mollame (Estr. dal « Giornale di matematica di Battaglini »). s. l., 1923. 8°, pp. 1-15.

Villavecchia G. V. — Dizionario di merceologia e di chimica applicata (vol. II) Milano, 1924. 8°, pp. 873-1680.

Volta A. — Le opere di Alessandro Volta; edizione nazionale (vol. II). Milano, 1923. 4°, pp. I-XII, 1-372.

Wardle M. — The principles of insect control (Publications of the University of Manchester, n. CLV). Manchester, 1923. 8°, pp. I-XVI, 1-295.

Washington H. S. — Augite of the Alban Hills, Italy (Repr. from the « American Mineralogist », vol. VIII, n. 6, 1923, pp. 104-110). Washington, 1923. 8°.

WASHINGTON H. S. — Comagmatic regions and the Wegener hypothesis (Repr. from « Journal of the Washington Academy of Sciences », vol. XIII, n. 15, pp. 339-347). Washington, 1923. 8°.

WASHINGTON H. S. — Petrology of the Hawaiian Islands: II. Hualalai and Manna Loa (Repr. from the « American Journal of Science », vol. VI, 1923, pp. 99-126). Washington. 8°.

WASHINGTON H. S. — Petrology of the Hawaiian Islands: III. Kilauea and general Petrology of Hawaii (Repr. from the « American Journal of Sciences », vol. VI, 1923, pp. 337-367). Washington, s. d. 8°.

WASHINGTON H. S. — Petrology of the Hawaiian Islands: IV. the Formation of AA and Pahoehoe (Repr. from the « American Journal of Sciences », vol. VI, 1923, pp. 409-423). Washington, s. d. 8°.

WASHINGTON H. S. — Stone ages of Egypt and Hawaii (Repr. from « Journal of the Washington Academy of Sciences », vol. XIII, n. 17, pp. 377-383). Washington, 1923. 8°.